## 1.7 Konchoide von Nikodemes

Unter einer Konchoide versteht man eine spezielle ebene Kurve, die die Bewegung eines Punktes beschreibt, der sich, von einem festen Punkt aus gesehen, immer im gleichen Abstand zur Kurve verhält. Ein anderer Name ist "Muschelkurve".

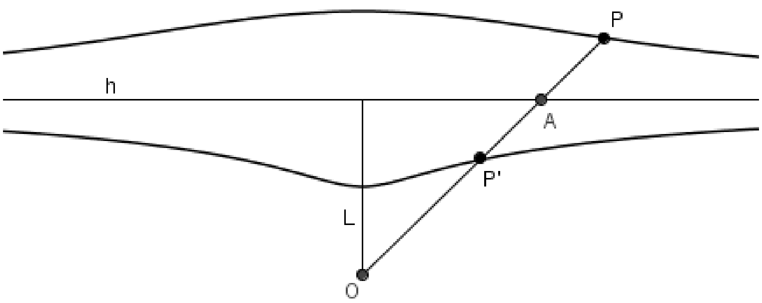



Abbildung : 1.12

Also:

$$|AP| = |AP'| = k$$

$$|Oh| = L$$

Die allgemeine Gleichung der Konchoide wird wie folgt hergeleitet:

$$(y - L)^2 + (x - \frac{xL}{y}) = y^2k^2$$

$$y^2(y - L)^2 + (xy - xL)^2 = y^2k^2$$

$$y^2(y - L)^2 + x^2(y - L)^2 = y^2k^2$$

$$(y - L)^2(x^2 + y^2) = y^2k^2$$

Grundlegend schauen wir uns drei Fälle der Konchoide an:

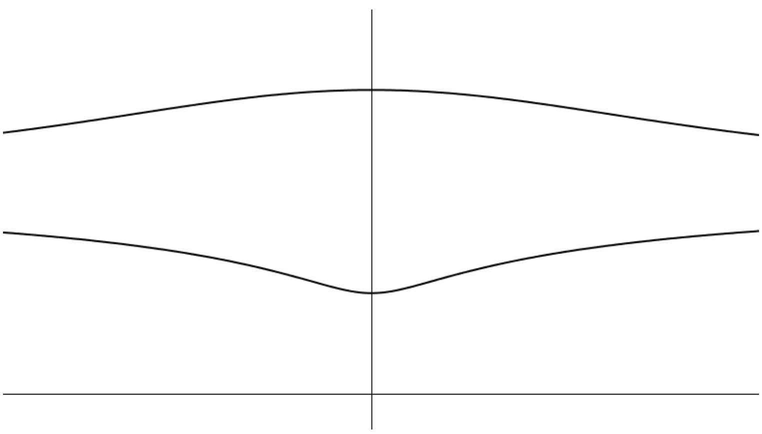


Abbildung : 1.22a L > k

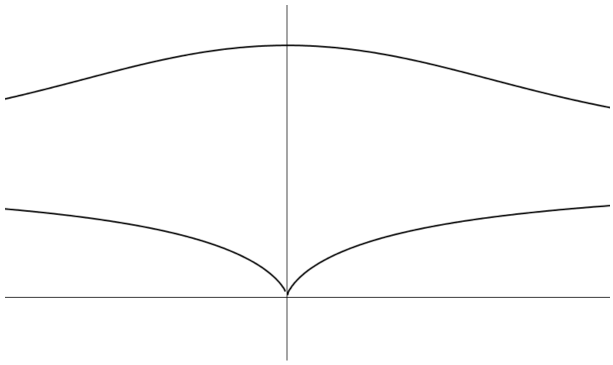


Abbildung : 1.22b L = k

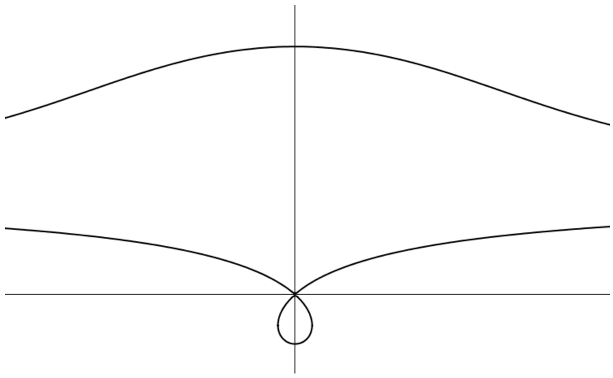


Abbildung : 1.22c L < k

**Winkeldreiteilung mit Konchoide**
Für eine Winkeldreiteilung mit Konchoide wie in Abbildung 1.23, führen wir folgende Schritte durch:

1. Zeichne eine Strecke $OP$, sodass $|AP| = 2|OA|$.
2. Von dem Punkt $A$ aus wird nun eine Strecke so gezeichnet, dass sie senkrecht auf der Geraden h liegt. So entsteht die Strecke $AP'$.
3. Zeichne die Strecke $OP'$ ein.
4. Vom Punkt A aus wird nun eine Strecke genau so gezeichnet, dass sich die Strecke $hP'$ halbiert.

Die Winkel $\angle(\mathrm{y}OP')$ und $\angle(AP'O)$ sind nun halb so groß wie die Winkel $\angle(P'OP)$ und $\angle(AA'O)$.

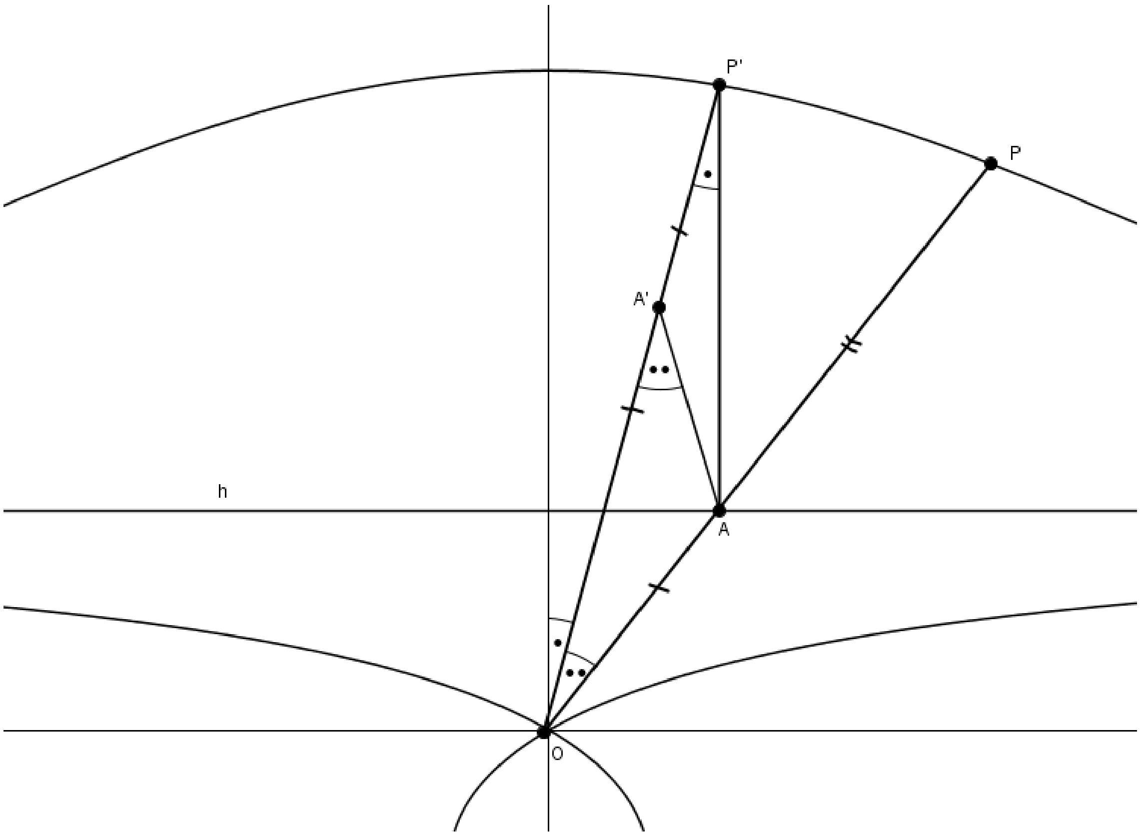
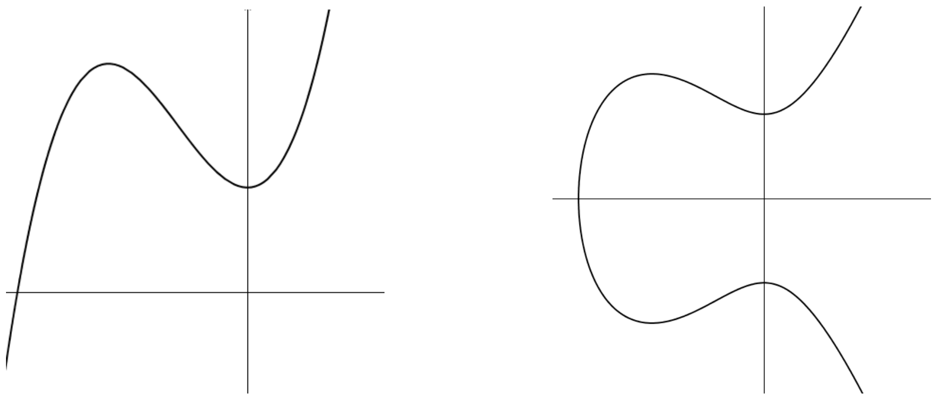



Abbildung : 1.23 Winkeldreiteilung mit Konchoide

## 1.8 Newton: Divergente Parabola

Im Folgenden zeigt Abbildung 1.24 2 verschiedene Graphen der Form $y = f(x)$ und $y^2 = f(x)$, wobei die Funktionen $f(x)$ jeweils exakt die selben sind.
Man kann somit an einer bekannten Funktion erkennen, wie sich die die Kurve der neuen Funktion verhält.



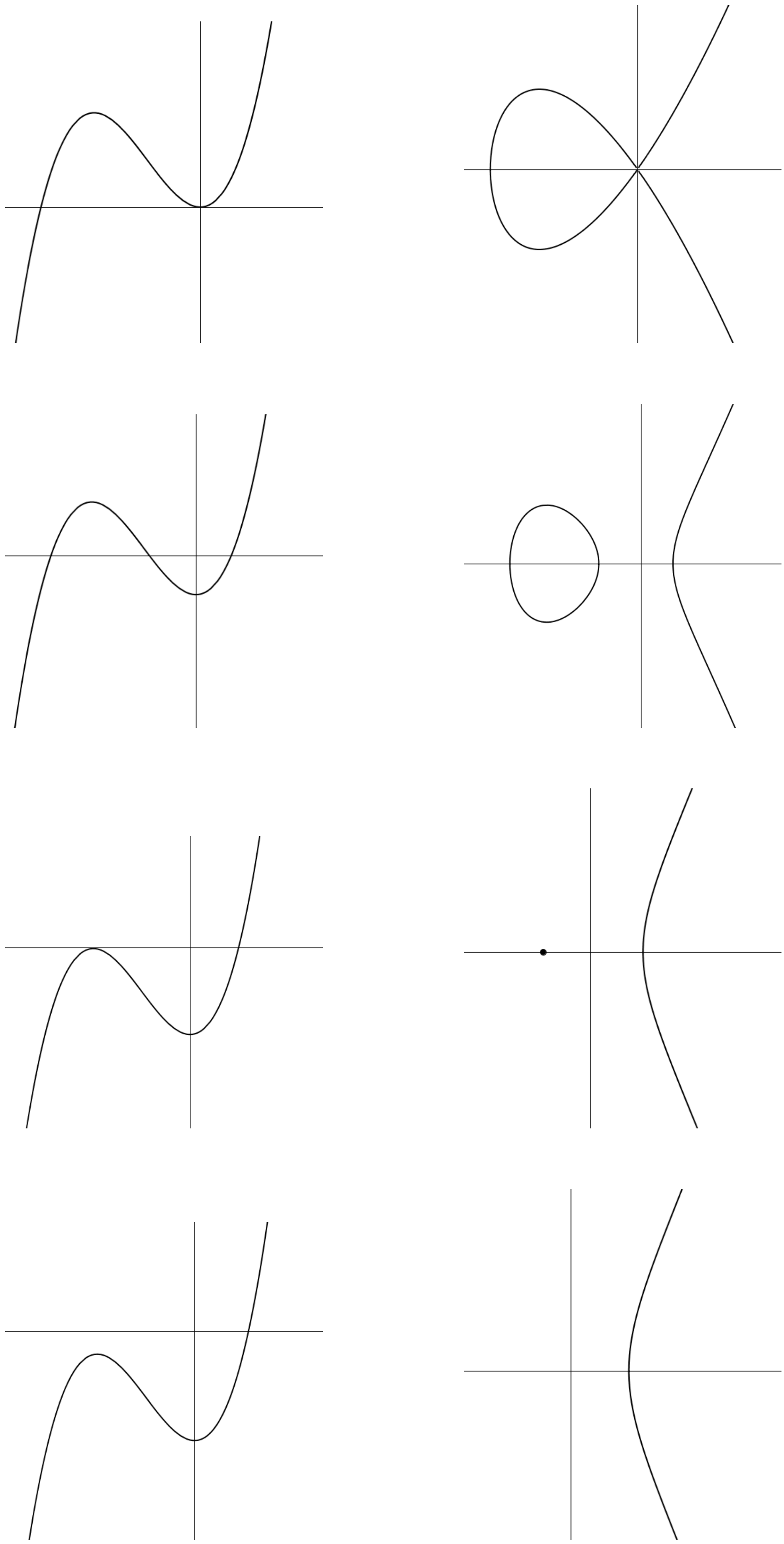


Abbildung : 1.24

**Der Newtonsche Knoten** Der Newtonsche Knoten wird durch die Gleichung $y^2 - x^2(1+x) = 0$ beschrieben.

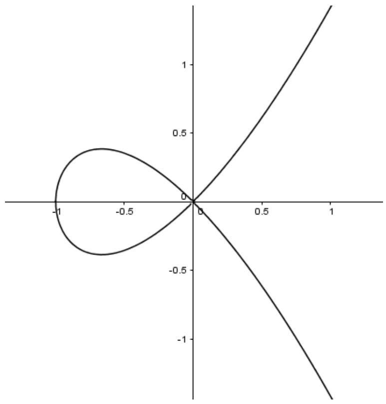



Abbildung : 1.25 Der Newtonsche Knoten in der reellen affinen Ebene

Die Parametrisierung dieser Kurve ist:

$$t = \frac{y}{x} \Longleftrightarrow y = tx$$

$$t^2x^2 - x^2(1+x) = 0 \Longleftrightarrow t^2 - (1+x) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = t^3 - t = t \cdot (t^2 - 1) \end{cases}$$

## 1.9 Die Ovalen von Cassini

Die Cassinische Kurve, oder auch "die Ovalen von Cassini", ist definiert als den Ort aller Punkte in der Ebene, an dem das Produkt aller Abstände zu zwei festen Punkten $A = (-a, 0)$, $B = (a, 0)$ konstant ist. Es gilt also:

$$|PA| \cdot |PB| = const \ , \ |PA|^2 \cdot |PB|^2 = const^2$$

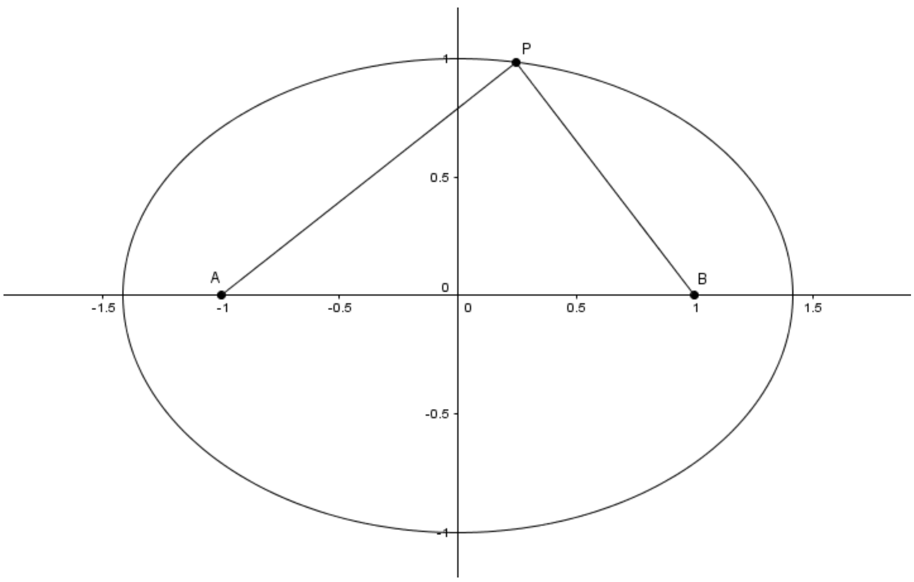



Abbildung : 1.26

**Herleitung der Koordinatengleichung:**

$$A = (-a, 0)\ ,\ B = (a, 0)$$

$$((x-a)^2 + y^2)((x+a)^2 + y^2) = c'$$

$$(x^2 - a^2)^2 + y^2(2x^2 + 2a^2) + y^4 = c'$$

$$x^4 - 2a^2x^2 + a^4 + 2x^2y^2 + 2a^2y^2 + y^4 = c'$$

$$(x^2 + y^2)^2 + 2a^2(y^2 - x^2) = c' = c^4 - a^4$$

In der Folgenden Abbildung sehen wir die verschiedenen Kurven der Ovalen von Cassini, die von außen nach innen folgende Bedingungen erfüllen:

$$c > a\sqrt{2}\ ,\ c = a\sqrt{2}\ ,\ a < c < a\sqrt{2}\ ,\ c = a\ ,\ c < a \text{ und nochmal } c < a$$

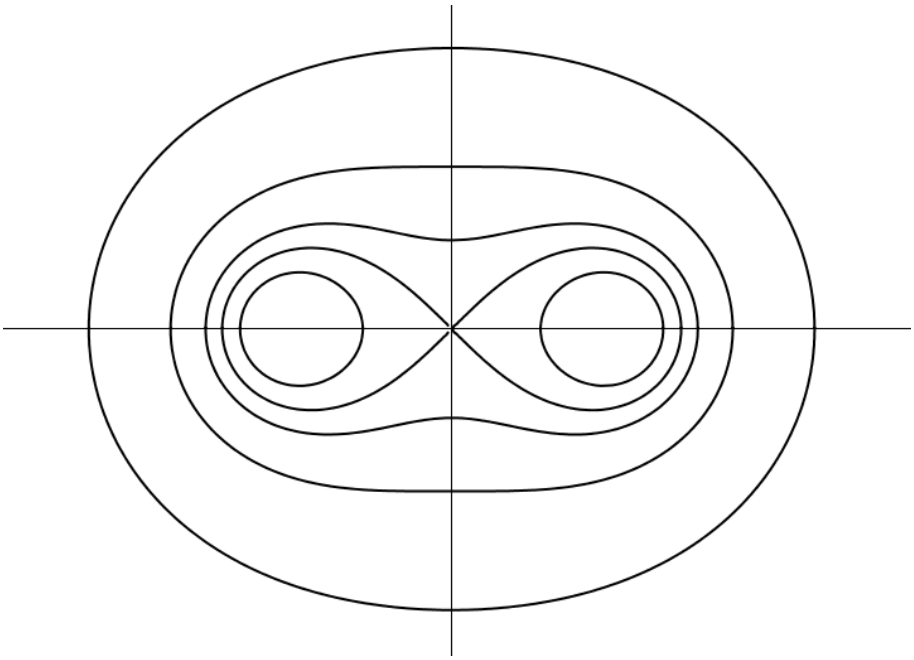


Abbildung : 1.27

Für $a = c$ erhält man die Lemniskate.

**Proposition** Die Lemniskate geht bei Inversion am Kreis über in eine Hyperbel.

In Abbildung 1.28 sehen wir, dass die Hyperbel bezüglich der Spiegelung am Einheitskreis invers zur Lemniskate ist. Jeder Punkt der Hyperbel ist durch ein Geradenstück mit dem Ursprung verbunden. Der Schnittpunkt mit der Lemniskate wurde markiert. Die Länge der Strecke vom Ursprung bis zur Lemniskate erhält man durch den Kehrwert des Abstandes zwischen Ursprung und Ausgangspunkt auf der Hyperbel. Der Punkt, bei dem sich die Lemniskate kreuzt, wird dabei dem unendlich fernen Punkt auf der Hyperbel zugeordnet.
Durch die Transformation

$$(x, y) \mapsto \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$$

findet man den Punkt auf der Lemniskate, der dem Punkt $(x, y)$ auf der Hyperbel zugeordnet ist. Mit dieser Transformation wird die Gleichung der Hyperbel in eine Gleichung der Lemniskate überführt:

$$x^2 - y^2 = (x^2 + y^2)^2$$

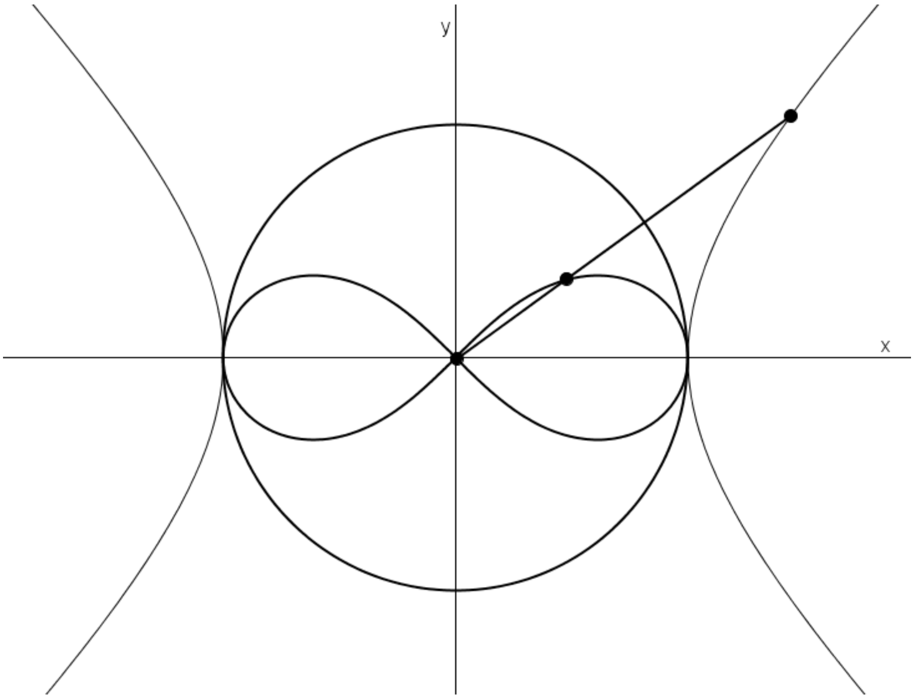



Abbildung : 1.28

# Kapitel 2

## 2.1 Erste Begriffe

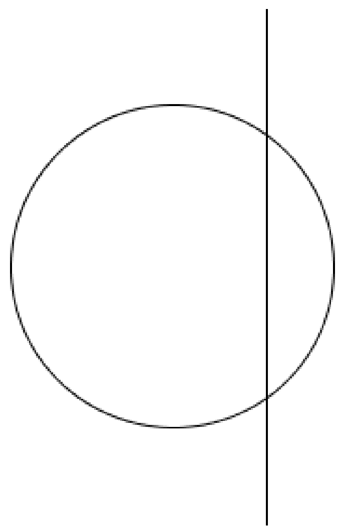


Abbildung : 1.29

Verschiebt man die Gerade zum Kreisrand hin, so wird sie zur Tangente und hat anstatt zwei nur noch einen doppelten Schnittpunkt.

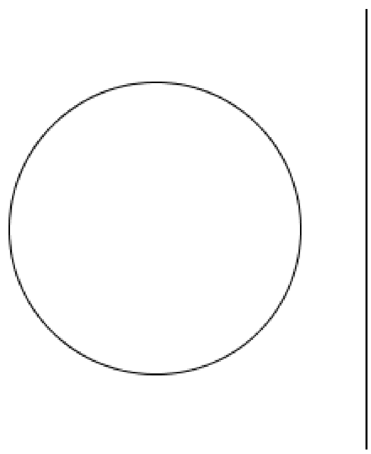


Abbildung : 1.30

Verschiebt man nun diese Tangente noch weiter vom Kreis weg, so liegen auf der Gerade wieder zwei Punkte, die wir aber nicht direkt sehen können. Sie sind komplex geworden.

Habe man also die Einheitskreisgleichung $x^2 + y^2 = 1$ und setze $x = 2$, dann folgt, dass $y^2 = -3$ und somit $y = \pm i\sqrt{3}$, wobei $i$ die komplexe Zahl $\sqrt{-1}$ beschreibt.
Wir arbeiten also mit Funktionen der Abbildung $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$.

**Definition:** Eine ebene algebraische Kurve ist eine Teilmende des $\mathbb{C}^2$ von der Form $(x,y) \in \mathbb{C}^2 : f(x,y) = 0 =: V(f)$, $V(f)$ sei die "Verschwindungsmenge von $f$", wobei $f$ ein Polynom vom Grad $\geq 1$ ist.

Hier gilt, dass $V(f) = V(\lambda f)$, für ein $\lambda \neq 0$, sowie $V(f) = V(f^2)$. Die Nullstellen von $f$, $\lambda f$ und $f^2$ sind also die selben.

**Polynome:** Ein Polynom ist eine Funktion der Form $f(x,y) = \sum_{0 \leq i,j \leq N} a_{ij} \cdot x^i \cdot y^j$, wo bei $x^i \cdot y^j$ die Monome sind und $a_{ij} \in \mathbb{C}$ die Koeffizienten der Monome.

Grad eines Polynoms: $x^i \cdot y^j$: $i :=$ $x$-Grad, $j :=$ $y$-Grad, $i + j :=$ Totalgrad
Grad$(f) := \max\{i + j : a_{ij} \neq 0\}$
Grad$(1) = 0$, Grad$(0) = -\infty$

Polynome vom Grad 0: Konstante
Polynome vom Grad 1: $a + bx + cy$ linear, 3 Koeffizienten $a$, $b$, $c \in \mathbb{C}$
Polynome vom Grad 2: $a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2$, 6 Koeffizienten
Polynome vom Grad 3: 10 Koeffizienten
Polynome vom Grad 4: 15 Koeffizienten
...
Polynome vom Grad $d$: $\frac{(d+1)(d+2)}{2}$ Koeffizienten

## 2.2 $\mathbb{C}[X,Y] = \{f = \sum a_{ij} x^i y^j\}$ Menge aller Polynome

**Polynomring:** $R$ ein kommutativer Ring mit einer 1. Dann ist der Polynomring $R[X]$ die Menge aller Polynome mit Koeffizienten aus dem Ring $R$ und der Variablen $X$ zusammen mit der üblichen Addition und Multiplikation von Polynomen.

$$f, g \in R[X] \text{Polynome:}$$

$$\text{Grad}(f + g] \leq \max\{\text{Grad}(f),\, \text{Grad}(g)\}$$

$$\text{Grad}(f \cdot g) = \text{Grad}(f) + \text{Grad}(g)$$

**Faktorieller Ring:** In einem faktoriellen Ring kann jede Funktion $f \in R[X]$ (hier: $R[X] = \mathbb{C}[X,Y]$) eindeutig bis auf Reihenfolge und Multiplikation mit Einheiten in ein Produkt aus irreduziblen Faktoren zerlegt werden: $f = f_1 \cdot f_2 \cdot ... \cdot f_r$, wobei $f_i$, $i = 1, ...r$ irreduzibel.

## 2.3 Affine Transformationen

Eine affine Transformation beschreibt eine Abbildung zwischen zwei affinen Räumen, bei der Parallerität, Kollinearität und Teilverhältnisse erhalten bleiben. Erlaubt sind: Translationen, Drehungen und Streckungen.

$$x \longmapsto \alpha x + \beta y + \varepsilon \ , \ y \longmapsto \gamma x + \delta y + \varphi \ , \text{ wobei } \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0 \ , \ \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \varphi \in \mathbb{C}$$

**Beispiel: Der Einheitskreis** Nehme man die Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ des Einheitskreises. Definiere die Abbildungsgleichung $x \longmapsto x$ , $y \longmapsto iy$.
$\Longrightarrow x^2 + (iy)^2 = 1 \Longleftrightarrow x^2 - y^2 = 1 \Longrightarrow$ wird zur Hyperbel.

Sei $f \in \mathbb{C}[X,Y]$ mit $f(\alpha x + \beta y + \varepsilon \ , \ \gamma x + \delta y + \varphi) =: g(x,y) \in \mathbb{C}[X,Y]$, g ist dann das transformierte Polynom.
$\Longrightarrow f \sim g$ affine Äquivalenz.

**Beispiel:** Kreis $\sim$ Ellipse $\sim$ Hyperbel: $x^2 + y^2 - 1 \sim 3x^2 + y^2 - 1 \sim x^2 - y^2 - 1$.